

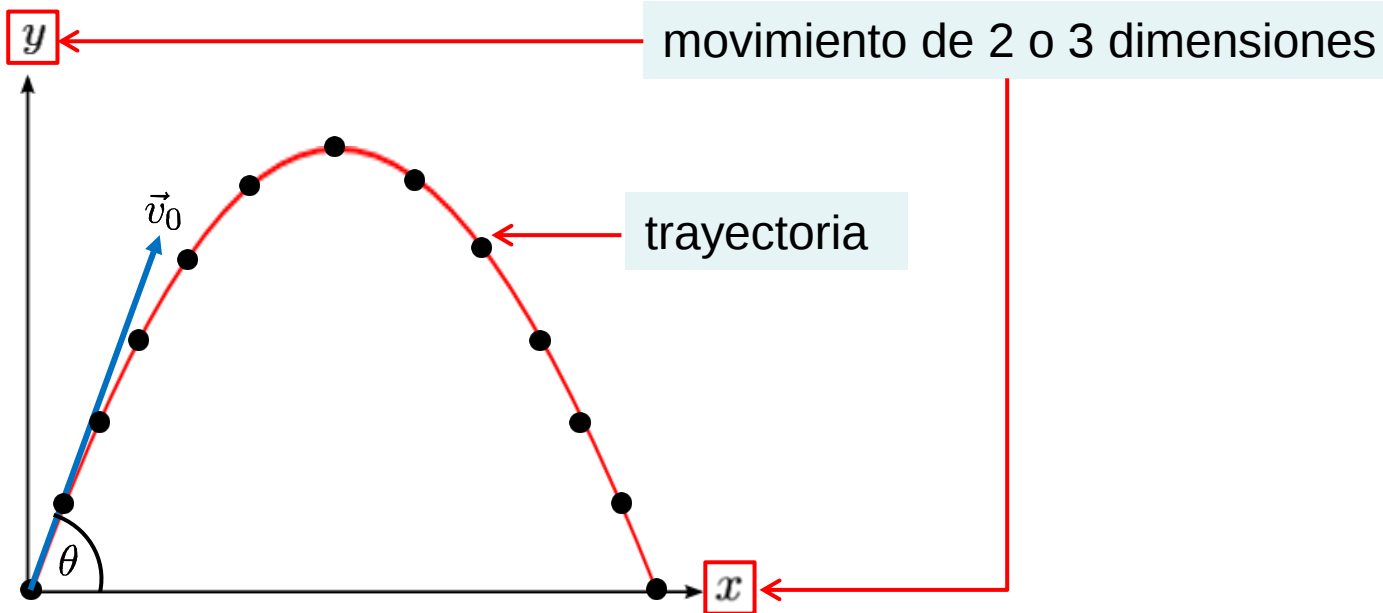
3. Movimiento en 2 o 3 dimensiones

Movimiento de proyectiles

Proyectil



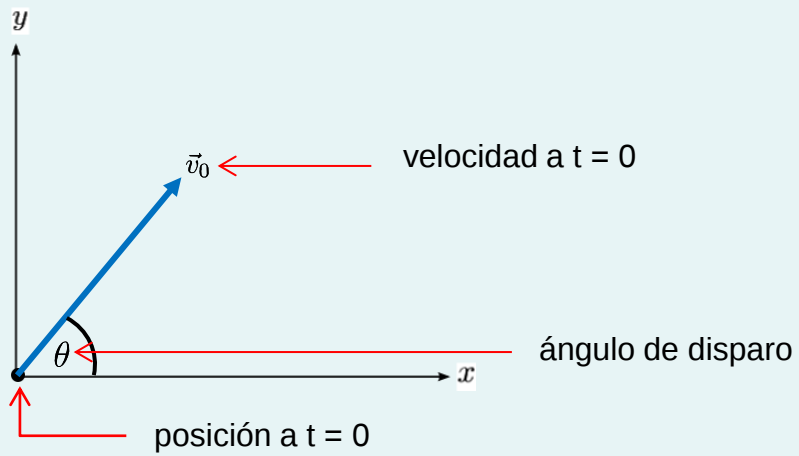
Cualquier cuerpo que se mueve bajo la acción de la gravedad.



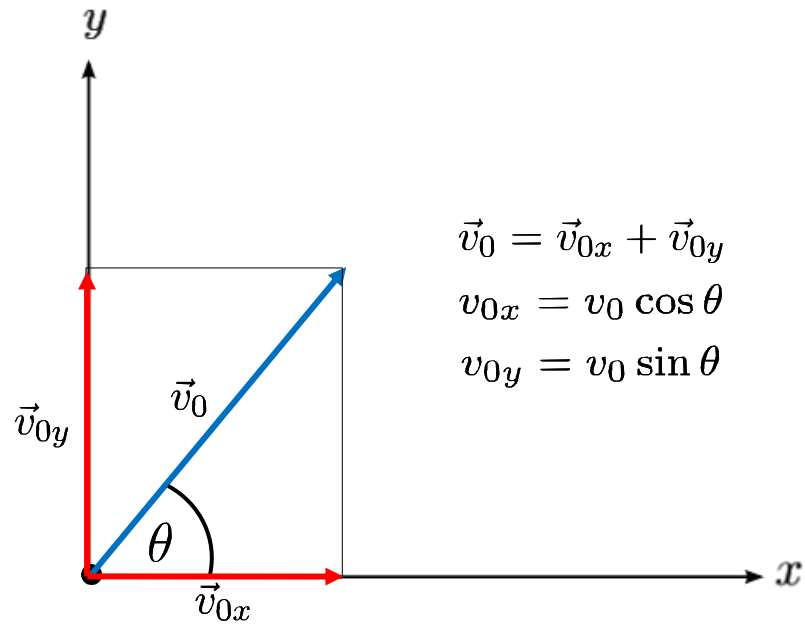
Trayectoria



Conjunto de todas las posiciones que tiene el proyectil durante su movimiento.



Buscando los componentes



movimiento de proyectil de 2-D (o 3-D)

se divide en dos (o 3) movimientos simples

movimiento de 1-D
horizontal

movimiento de 1-D
vertical

cuando $t_i = 0 \rightarrow \Delta t = t_f - t_i = t$

$$\vec{x} = \underbrace{\vec{x}_0}_0 + \underbrace{\vec{v}_{0x}t}_{v_{0x} = v_0 \cos \theta} + \underbrace{\frac{1}{2}\vec{a}_x t^2}_0$$

$$x = (v_0 \cos \theta) t$$

$$\vec{v}_x = \vec{v}_{0x} + \underbrace{\vec{a}_x t}_0$$

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \theta$$

movimiento uniforme

$$\vec{y} = \underbrace{\vec{y}_0}_0 + \underbrace{\vec{v}_{0y}t}_{v_{0y} = v_0 \sin \theta} + \underbrace{\frac{1}{2}\vec{a}_y t^2}_{\vec{a}_g}$$

$$y = (v_0 \sin \theta) t - \frac{1}{2}|\vec{a}_g|t^2$$

$$\vec{v}_y = \underbrace{\vec{v}_{0y}}_{v_{0y} = v_0 \sin \theta} + \underbrace{\vec{a}_y t}_{\vec{a}_g}$$

$$v_y = v_0 \sin \theta - |\vec{a}_g|t$$

movimiento uniformemente
acelerado

movimiento vertical

Tiempo de vuelo $y = 0$

$$0 = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}a_g t^2$$

↓ factorizar t

$$0 = t(v_0 \sin \theta - \frac{1}{2}a_g t)$$

↓ resolver por t

$$t = 0, \frac{2v_0 \sin \theta}{a_g} = \frac{2v_{0y}}{a_g}$$

Alcance horizontal $t = \frac{2v_0 \sin \theta}{a_g}$

↓ sustituir en t

$$x = (v_0 \cos \theta)t$$

$$x = (v_0 \cos \theta) \left(\frac{2v_0 \sin \theta}{a_g} \right)$$

↓ manipular

$$x = R_h = \left(\frac{v_0^2}{a_g} \right) 2 \sin \theta \cos \theta$$

↓ manipular con
identidad
trigonométrica

$$R_h = \left(\frac{v_0^2}{a_g} \right) \sin(2\theta)$$

movimiento horizontal

movimiento vertical

Tiempo al punto más alto $v_y = 0$

$$0 = v_0 \sin \theta - a_g t$$

despejar por t

$$t = \frac{v_0 \sin \theta}{a_g} = \frac{v_{0y}}{a_g}$$

OJO El tiempo al punto más alto es la mitad del tiempo de vuelo.

Tiempo medio de vuelo es

$$t_{1/2} = \frac{v_0 \sin \theta}{a_g} = \frac{v_{0y}}{a_g}$$

Altura máxima con $t_{1/2} = \frac{v_0 \sin \theta}{a_g}$

sustituir en t

$$y = (v_0 \sin \theta) t - \frac{1}{2} a_g t^2$$

$$y_{max} = (v_0 \sin \theta) \left(\frac{v_0 \sin \theta}{a_g} \right) - \frac{1}{2} a_g \left(\frac{v_0 \sin \theta}{a_g} \right)^2$$

manipular

$$y_{max} = \left(\frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{a_g} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{a_g} \right)$$

$$y_{max} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{a_g} \right)$$

Ecuación de la trayectoria

$$x = (v_0 \cos \theta) t \xrightarrow{\text{despejar por } t} t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$$

sustituir en

$$y = (v_0 \sin \theta) t - \frac{1}{2} a_g t^2$$

↓

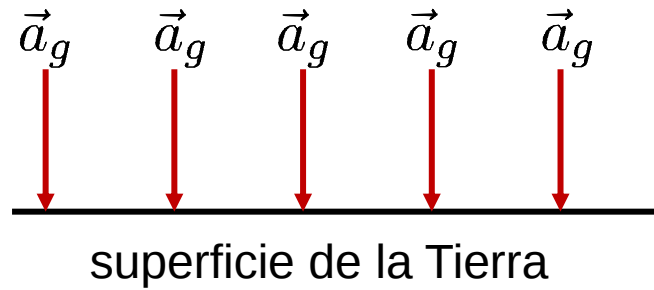
$$y = (v_0 \sin \theta) \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right) - \frac{1}{2} a_g \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2$$

↓ manipular

$$y = (\tan \theta) x - \left(\frac{a_g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x^2$$

ecuación cuadrática: la trayectoria describe una parábola

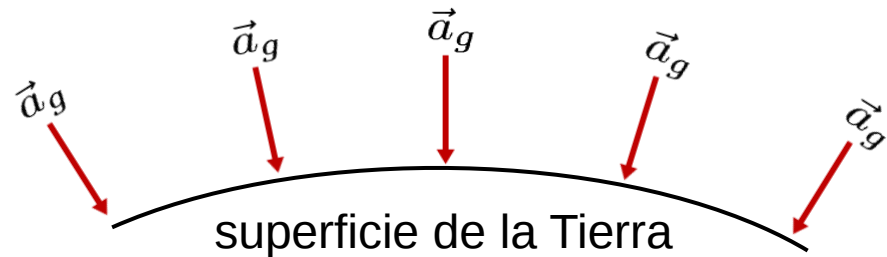
Estamos suponiendo que la aceleración debido a la gravedad $\vec{a}_g$ es uniforme.



resulta en una trayectoria **parabólica**

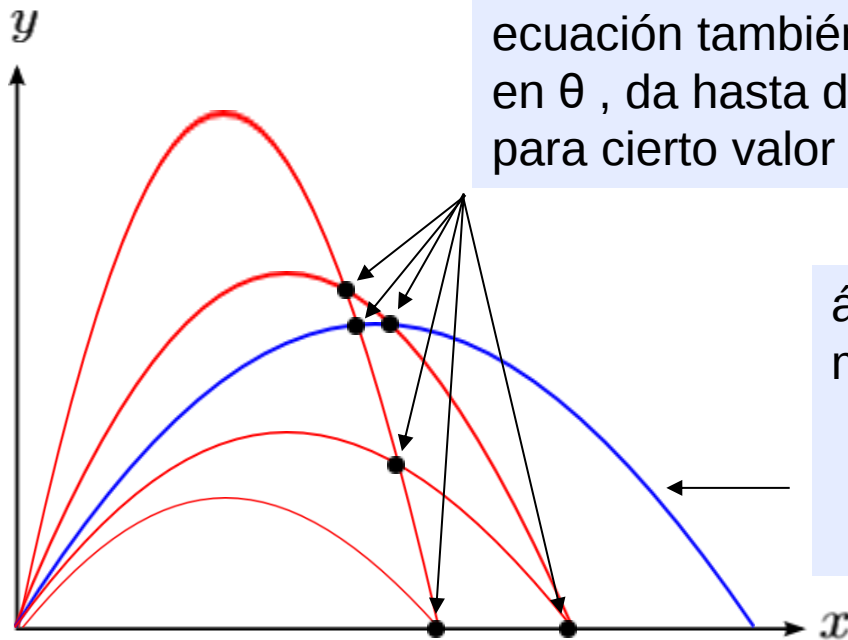
PERO la aceleración debido a la gravedad $\vec{a}_g$ no es uniforme.

direcciones son diferentes



resulta en una trayectoria **elíptica**

$$y = (\tan \theta)x - \left(\frac{a_g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x^2$$



ecuación también es cuadrática en θ , da hasta dos valores de θ para cierto valor de x , y , v_0

ángulo de disparo de 45° da mayor alcance horizontal

$$R_h = \left(\frac{v_0^2}{a_g} \right) \sin(2\theta)$$

Ecuación alcance de una altura h

$$y = h + (v_0 \sin \theta) t - \frac{1}{2} a_g t^2 \rightarrow 0 = h + (v_0 \sin \theta) t - \frac{1}{2} a_g t^2$$

$$t = \frac{v_0 \sin \theta}{a_g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin \theta}{a_g}\right)^2 + 2 \frac{h}{a_g}} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{resolver} \\ \text{por } t \end{array}$$

sustituir ↓

$$x = (v_0 \cos \theta) t$$

↓ manipular

$$R = \left(\frac{v_0^2}{a_g}\right) \sin \theta \cos \theta + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{a_g}\right)^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2 \left(\frac{v_0^2}{a_g}\right) h \cos \theta}$$

¿Qué ángulo da el alcance máximo?

primera derivada = 0 da el
máximo o mínimo



$$\frac{dR}{d\theta} = 0$$



bastante difícil a resolver
analíticamente a mano,
típicamente se resuelve
numéricamente