

Fuerza de resistencia debido al aire

1 Objetivo

Obtener experimentalmente una curva de velocidad versus masa por un objeto cónico con masa m y área de sección A cayendo en aire. Determinar si la fuerza de resistencia es tipo laminar o turbulento. Determinar para un cono cayendo en aire la relación entre velocidad terminal y masa y entre velocidad terminal y área del cono. Analizar una gráfica de posición versus tiempo por un objeto cónico cayendo en aire. Observar que el objeto llega a una velocidad terminal y determinar esa velocidad terminal.

2 Teoría

El movimiento de un objeto en un fluido (aire) se distingue de la caída libre por la presencia de una fuerza resistiva (F_D). Esa fuerza resistiva tiene básicamente dos diferentes comportamientos dependiendo de la rapidez v y del tamaño del cuerpo.

A velocidad baja y objeto de tamaño pequeño tenemos flujo laminar donde: $F_D = -C_l \rho A v$ donde C_l es el coeficiente de resistencia laminar, ρ es la densidad del fluido (aire), y A es el área de sección efectivo del objeto y v es la rapidez del cuerpo que se mueve.

A velocidad alta y objeto de tamaño grande tenemos flujo turbulento donde: $F_D = -0.5 C_t \rho A v^2$ donde C_t es el coeficiente de resistencia turbulento.

El número Reynolds nos da la razón de las fuerzas inerciales a fuerzas de viscosidad actuando sobre el cuerpo. El número está definido como $Re = \frac{\rho v L}{\eta} = \frac{v L}{\nu}$ donde ρ es la densidad del fluido, v es la rapidez, L es un largo característico del cuerpo, η es la viscosidad dinámica del fluido, y ν es la viscosidad cinemática del fluido. La viscosidad cinemática del aire a 300K es de $1.568 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. Para un cuerpo esférico que se mueve en un fluido, cuando el número Reynolds es mayor a 10,000 el flujo resulta ser turbulento y menor a 1 el flujo resulta ser laminar. Para un objeto plano que por su geometría desarrolla más turbulencia, suponemos un número Reynolds mayor a 5,000 para un flujo turbulento.

La segunda ley de Newton nos dice que para un objeto cayendo en aire: $F_{neta} = F_d + F_g$. Cuando la fuerza resistiva y la fuerza de gravedad están iguales en magnitud (pero dirección opuesta), la fuerza neta es igual a cero, y la aceleración es cero. Entonces observamos una

velocidad constante llamado velocidad terminal (v_T). En flujo laminar $v_T \propto m$ pero en flujo turbulento $v_T \propto \sqrt{m}$.

3 Procedimiento

1. Descargar de la página web el video y data de posición versus tiempo de la caída de un cono.
2. Medir la masa y diámetro de sus conos de mayor y de menor diámetros.
3. Colocar un regla de 2m sobre su mesa y sobre pasando la mesa por 0.5 m a 0.75 m en el aire. Medir la altura h del borde superior de la regla del piso.
4. Buscar el programa 'CMV edu' para su smartphone. Lo tiene para el iPhone. Con el 'CMV edu' tomar un video de su cono cayendo a un extremo y afuera de la mesa de laboratorio de una altura de 1-1.5 m por encima de la mesa. La cámara debe estar acostado con la lente hacia abajo y estacionario en el lado extremo (o más lejos) de **otra** mesa de laboratorio. Anotar el tiempo inicial t_i del 'frame' cuando la punta es a punto de desaparecer detrás de la regla horizontal y el tiempo final t_f cuando la punta del cono toca el piso.
5. Repetir el paso anterior, dejando caer el cono siempre de la misma posición, con una masa añadido al cono de 2 gramo. Y repetir hasta tener 20 gramos añadido (10 corridas). Anotar sus valores de la masa total m_{tot} del cono incluyendo la masa añadida y los tiempo iniciales y finales.

dia. (cm) =		h (m) =	
masa añadida (g)	m_{tot} (g)	t_i (s)	t_f (s)
0			
2			
4			
6			
8			
10			
12			
14			
16			
18			
20			

6. Con el cono de menor diámetro, añadir suficiente masa para que sea igual a la masa del cono de mayor diámetro, medido en el procedimiento 2.
7. Repetir el procedimiento 4 con el cono de diámetro menor. Una corrida solamente.

dia. (cm) =		h (m) =	
masa añadida (g)	m_{tot} (g)	t_i (s)	t_f (s)

4 Interpretación de los resultados

1. Determinar el tiempo $\Delta t = t_f - t_i$ que toma el cono caer de la regla horizontal hasta el piso de todas sus corridas. Crear una tabla de valores con m_{tot} , t_i , t_f , Δt para los dos conos de mayor y menor diámetro.
2. Calcular la velocidad terminal $v_T = \frac{h}{\Delta t}$ en [m/s] de todas sus corridas. Crear una tabla de valores de m_{tot} en [g] y v_T por el cono de mayor y menor diámetro.
3. Hacer una gráfica del logaritmo natural $\ln(m_{tot})$ vs el logaritmo natural $\ln(v_T)$ por sus corridas del cono de mayor diámetro. Cambiar las masas a kg.

Análisis: Si el cuerpo llegó a su velocidad terminal,

$$F_D = F_g$$

$$C\rho A(v_T)^n = mg$$

y queremos determinar el exponente n para determinar si el flujo es laminar o turbulento. Tomamos el logaritmo natural de ambos lados nos da

$$\ln(m) = n \ln(v_T) + \ln\left(\frac{C\rho A}{g}\right)$$

Entonces el exponente n esta dado por la pendiente de una línea recta dada por la regresión lineal de $\ln(m_{tot})$ vs. $\ln(v_T)$. Según su pendiente, ¿el flujo es laminar o turbulento?

4. Calcular el porciento de diferencia entre su valor para el exponente y el valor ideal para el flujo laminar o flujo turbulento según contestado en la interpretación anterior.
5. Utilizar el intercepto-y de su gráfica para estimar el valor de C utilizando el área de sección del cono de mayor diámetro en m^2 y la densidad del aire $\rho = 1.23 \text{ kg/m}^3$ y la $g = 9.785 \text{ N/kg}$.

Entonces, según sus valores, ¿ $F_D = ?$, escribir F_D como ese ejemplo $F_D = 0.543v^{1.875}$.

6. ¿Cómo cambia la velocidad terminal cuando cambiamos el área de sección del cuerpo cayendo manteniendo la masa constante?
Osea, ¿ $v_T \propto \frac{1}{A}$ o $\propto \frac{1}{\sqrt{A}}$?

Ayuda: calcular el factor de aumento de la velocidad terminal $\frac{V_{T,p}}{V_{T,g}}$ para el cono con área de sección grande (utilizar los datos de la primera corrida) y área de sección pequeña y comparar al factor de disminución del área $\frac{A_g}{A_p}$ o a la raíz cuadrada del factor de disminución del área $\sqrt{\frac{A_g}{A_p}}$. Las áreas pueden ser calculadas en cm^2 . Tenemos flujo laminar si la velocidad terminal es inversamente proporcional al área y flujo turbulento si la velocidad terminal es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del área.

¿Sus datos de área y velocidad terminal suportan que es flujo laminar o turbulento?

7. Calcular el número Reynolds para la primera corrida del cono de mayor diámetro. El tamaño característico del cono corresponde al diámetro del cono. Tener cuidado con las unidades, el número Reynolds no tiene dimensión. ¿El número Reynolds calculado suporta sus conclusiones de flujo laminar o turbulento?
8. Abrir la data de posición vs tiempo en Excel. Hacer una regresión lineal de la parte recta de la grafica. La pendiente da la velocidad terminal.

9. Utilizando algoritmos desarrollados en análisis numéricos, hacer la derivación numérica de su data de posición vs tiempo en Excel.

Ayuda: Si la data del eje-x esta igualmente espaciado ($\Delta x = \text{constante}$) como en el caso nuestro, utilizamos el siguiente algoritmo llamado Formula de la Derivada del Punto Medio con Cinco Puntos.

$$f'(x_0) = \frac{1}{12\Delta x} [f(x_0 - 2\Delta x) - 8f(x_0 - \Delta x) + 8f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 + 2\Delta x)]$$

Generar los valores de $f'(x_0)$ desde la tercera celda hasta la antepenúltima celda de tiempo. Esos valores representan la velocidad instantánea.

Promediar los 6 últimos valores de v_{inst} para sacar la velocidad terminal y comparar con su velocidad terminal de la interpretación anterior.