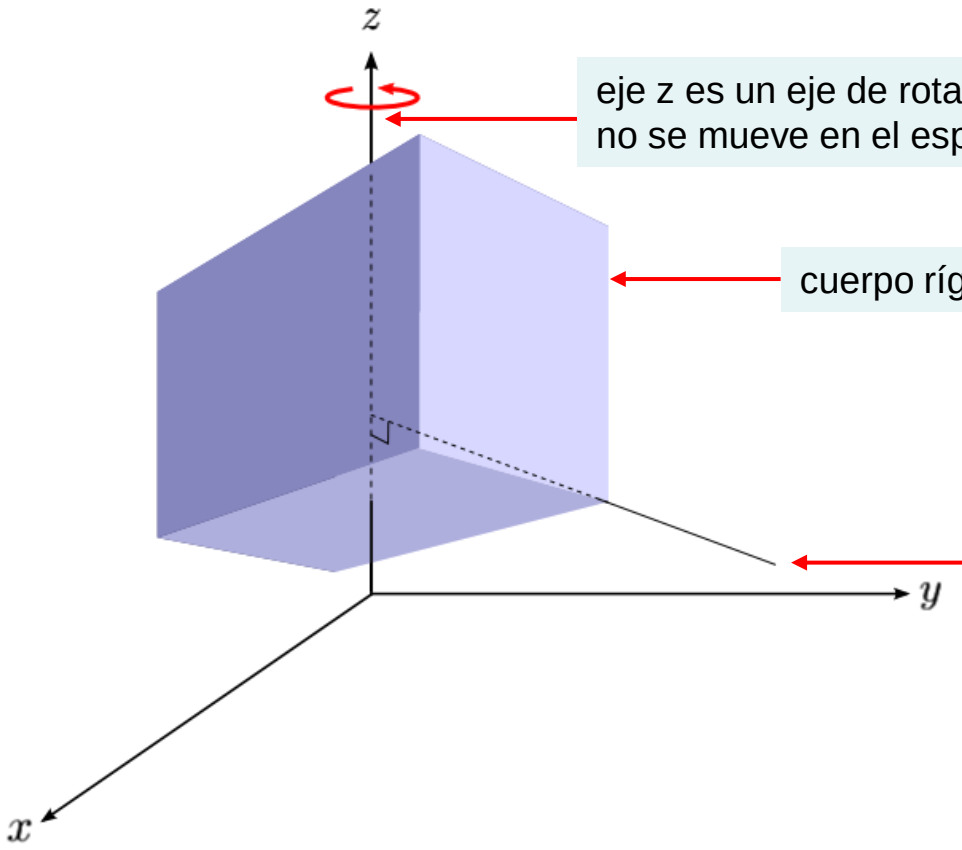
1. Movimiento rotacional y momento de inercia

Cinemática rotacional

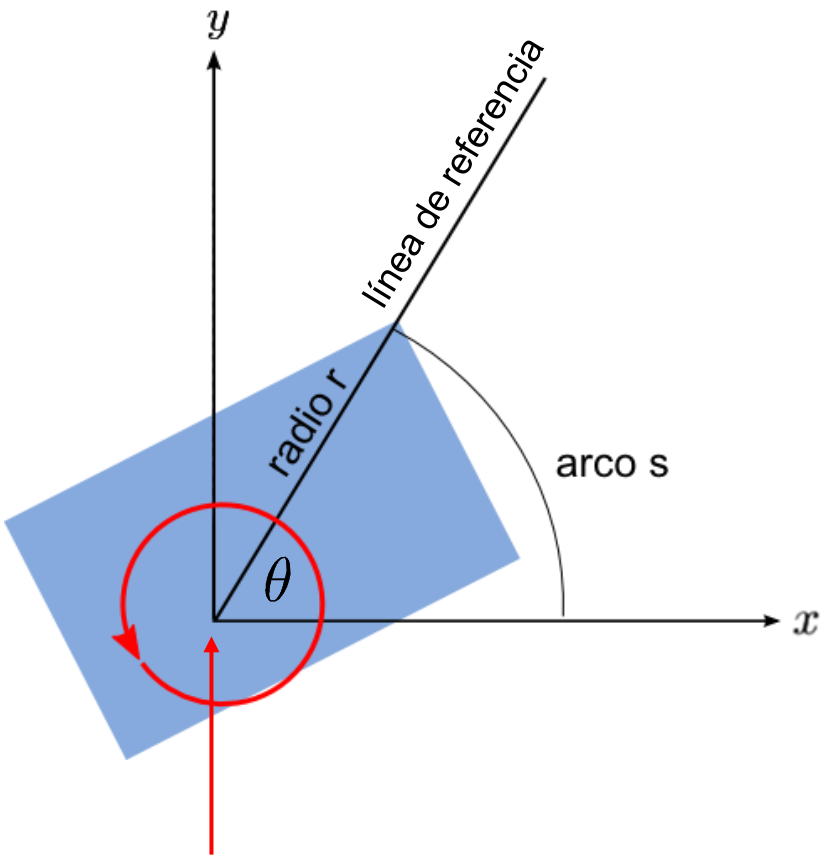


eje z es un eje de rotación fijo, no se mueve en el espacio

cuerpo rígido

línea de referencia $\perp$ al eje de rotación y fijado al cuerpo en un punto

vista superior



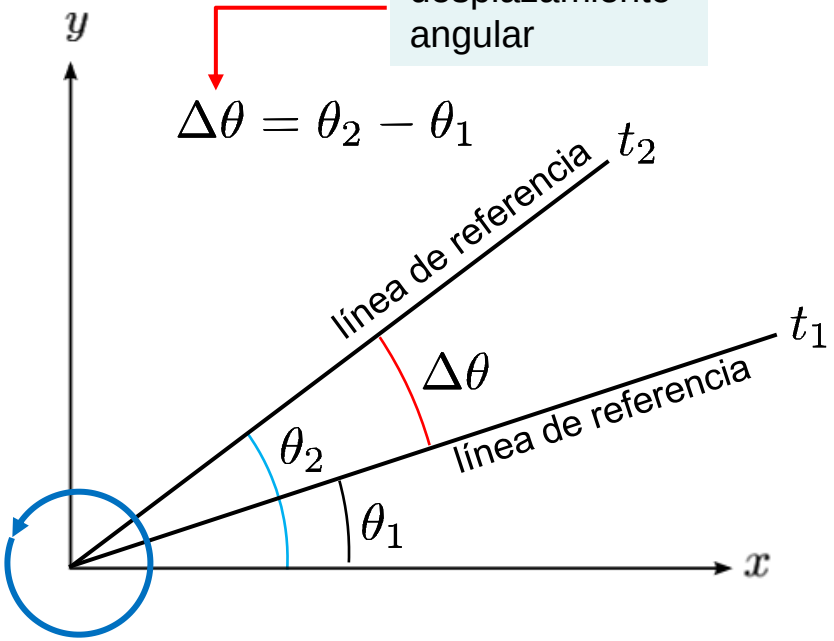
eje z esta saliendo de la pagina

$$\theta = \frac{s}{r} \; [\, rad \,]$$

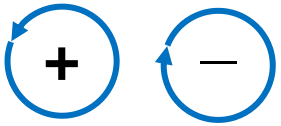
posición angular

desplazamiento angular

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$



dirección de la rotación



velocidad angular (ω) promedio

$$\omega_{avg} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \left[\frac{rad}{s} \right]$$

velocidad angular (ω)

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

aceleración angular (α) promedio

$$\alpha_{avg} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \left[\frac{rad}{s^2} \right]$$

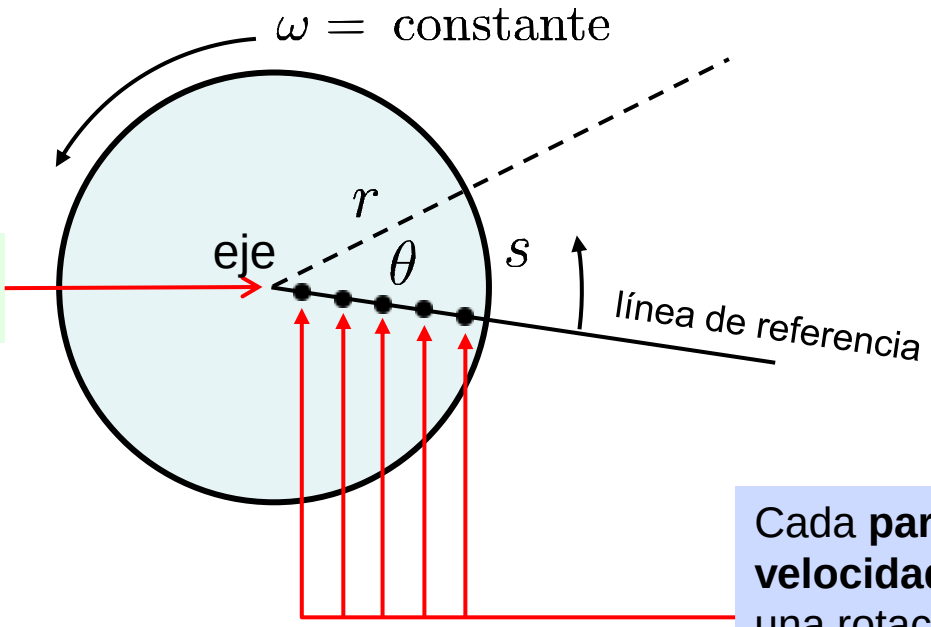
aceleración angular (α)

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Rotación con aceleración angular constante

Traslación	Rotación
$\Delta x = v_o \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$	$\Delta \theta = \omega_o \Delta t + \frac{1}{2} \alpha (\Delta t)^2$
$v = v_i + a\, \Delta t$	$\omega = \omega_i + \alpha\, \Delta t$
$v^2 = {v_i}^2 + 2\, a\, \Delta x$	$\omega^2 = {\omega_i}^2 + 2\, \alpha\, \Delta \theta$

Relaciones entre las variables traslacionales y rotacionales de la cinemática



eje saliendo de la pagina

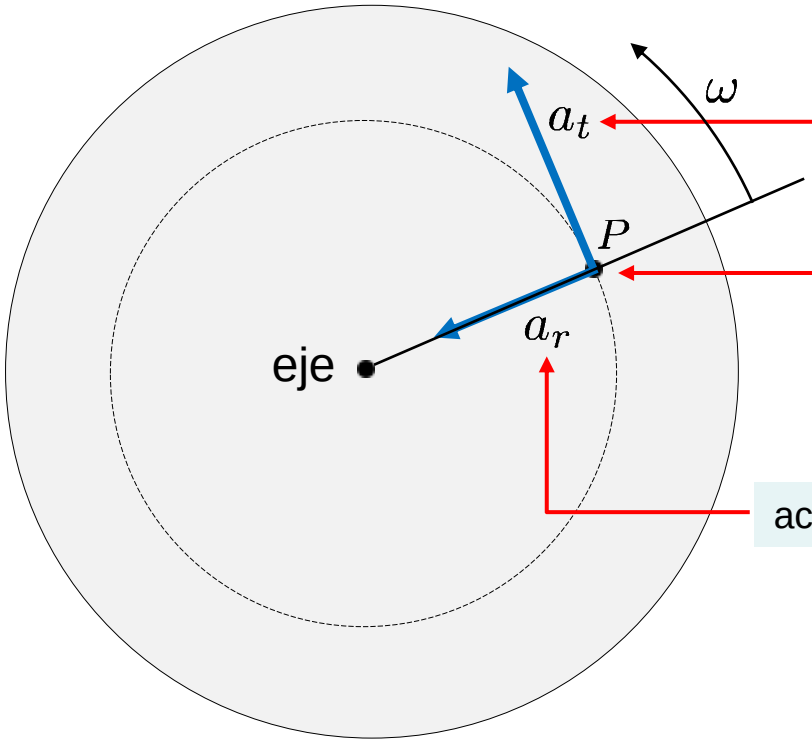
Cada **partícula** tiene la **misma velocidad angular**. Todas completan una rotación ($2\pi\ rad$) en el mismo tiempo, pero, tienen **diferentes velocidades lineales** (o traslacionales).

$$\theta = \frac{s}{r} \longrightarrow s = r\,\theta$$

$$\frac{d}{dt}[s = r\,\theta] \longrightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(r\theta) = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$v = r\,\omega$$ ← mayor la r ⟶ mayor la v

disco con aceleración angular α



aceleración tangencial

partícula en el punto P

aceleración radial

$$\frac{d}{dt}[v = r\,\omega] \longrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\omega) = r\frac{d\omega}{dt}$$

$$a_t = r\,\alpha$$

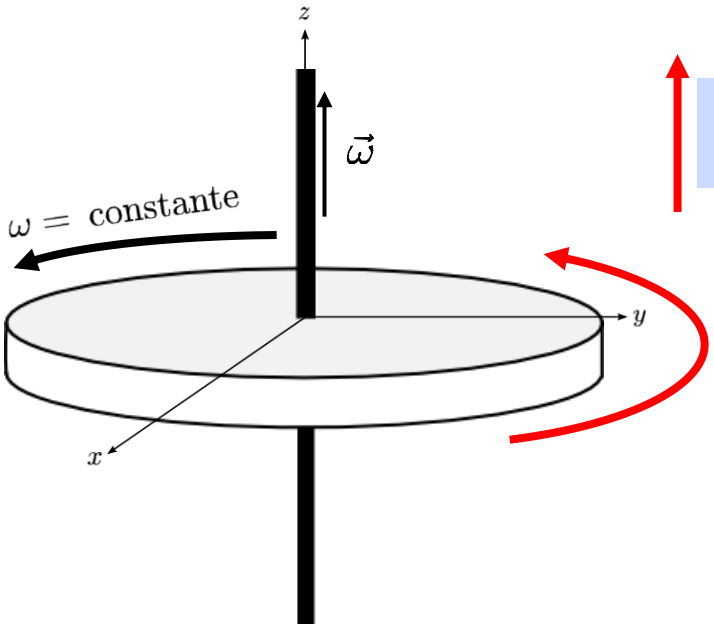
$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2$$

$$a_r = r\,\omega^2$$

aceleración tangencial (a_t) $\longrightarrow$ cambia la rapidez lineal de una partícula del cuerpo

aceleración radial (a_r) $\longrightarrow$ cambia la dirección de una partícula del cuerpo

Las variables $\vec{\theta}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$, $d\vec{\theta}$ son vectores. La dirección de $\vec{\omega}$ esta dada por la ley de la mano derecha (RHR).

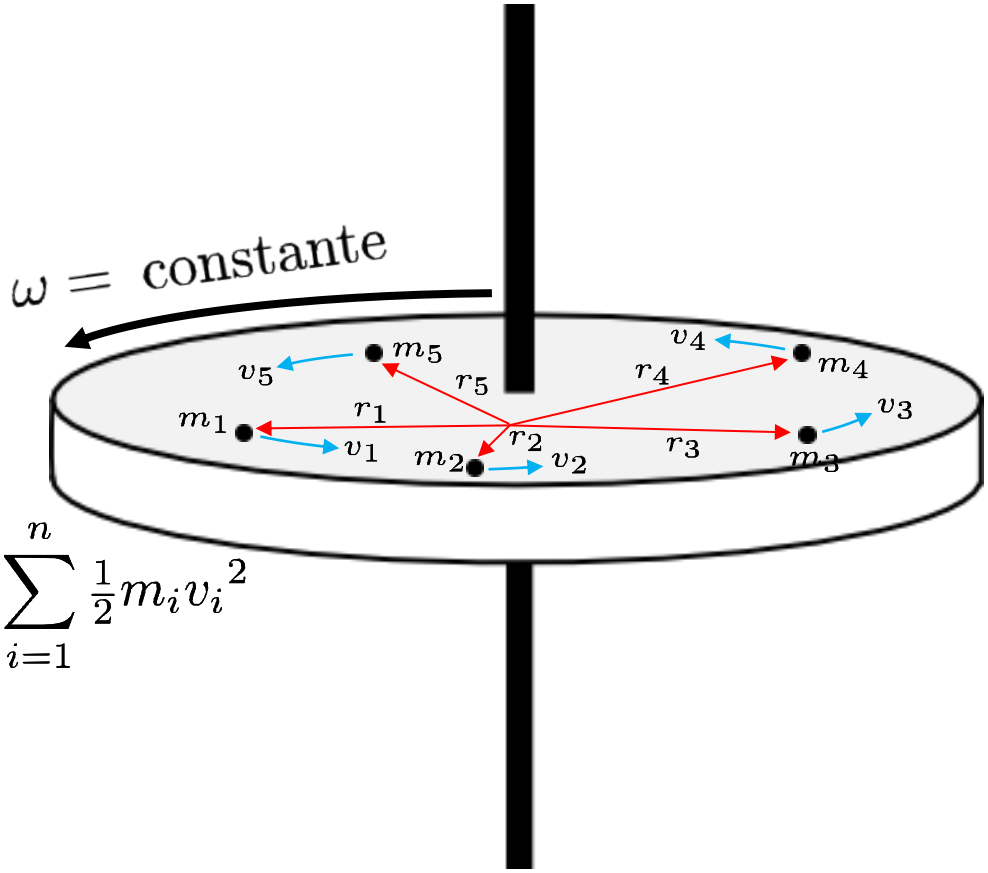


pulgar indica la dirección de $\vec{\omega}$

dedos de la mano derecha

La **dirección de la aceleración angular** $\vec{\alpha}$ está dada por el **comportamiento rotacional** del cuerpo. Si la **rapidez angular aumenta,** $\vec{\alpha}$ tiene la **misma** dirección que $\vec{\omega}$, si la **rapidez angular disminuye,** $\vec{\alpha}$ tiene una **dirección opuesta** a $\vec{\omega}$.

Energía cinética de rotación



$$KE_{rot} = \tfrac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \tfrac{1}{2}m_2{v_2}^2 + \ldots = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}m_i{v_i}^2$$

$$v = r\omega \longrightarrow v_i = r_i\omega$$

$$KE_{rot} = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}m_i(r_i\omega)^2$$

comparar

$$KE_{rot} = \tfrac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} m_i{r_i}^2\right]\omega^2$$

$$KE = \tfrac{1}{2}\boxed{m}v^2$$

El termino $(\sum_{i=1}^{n} m_i{r_i}^2)$ nos dice como la **masa** esta **distribuida alrededor del eje de rotación**. Tiene el **mismo rol** que la **masa en traslación**. Llamamos ese término **momento de inercia**.

Momento de inercia ⟹ Propiedad física que representa la resistencia que tiene los cuerpos a cambiar su movimiento rotacional. Simbolizado por la letra I.

por un sistema de partículas

$$\longrightarrow \quad I = \sum_{i=1}^{n} m_i {r_i}^2 \quad [kg\, m^2]$$

Esa resistencia a cambiar el movimiento rotacional no solamente **depende de la masa,** pero también de la **distribución de la masa** alrededor del eje de rotación.

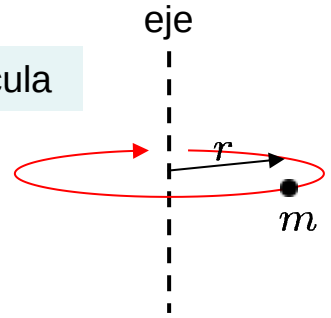
Tabla de transformación de movimiento traslacional a rotacional	
Traslación	Rotación
x, y, z	θ
v	ω
a	α
m	I

$$\tfrac{1}{2} m\, v^2 \longrightarrow KE_{rot} = \tfrac{1}{2}\, I\, \omega^2$$

por cuerpos continuos y rígidos

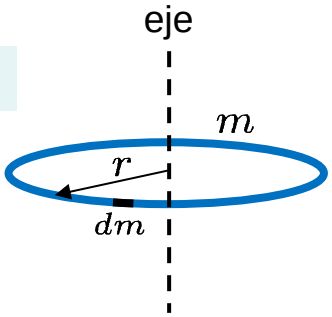
$$\longrightarrow \; I = \int r^2 dm$$

partícula



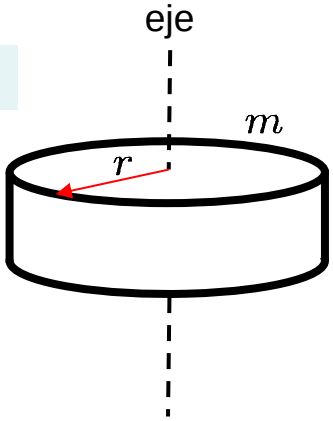
$$I = mr^2$$

anillo

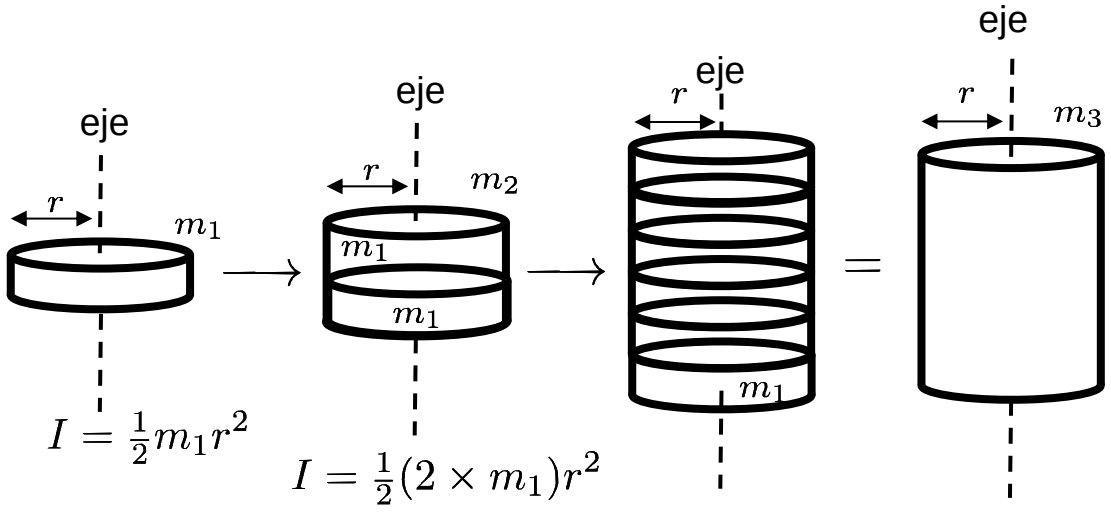


$$I = \int r^2 dm \longrightarrow r^2 \int dm = r^2 m = mr^2$$

disco

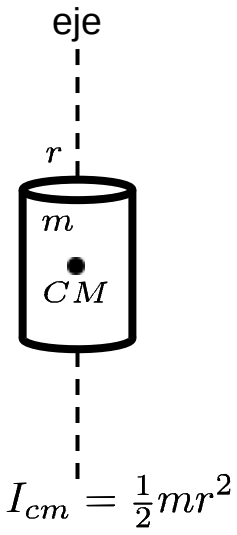


$$I = \int r^2 dm \longrightarrow \frac{1}{2} mr^2$$

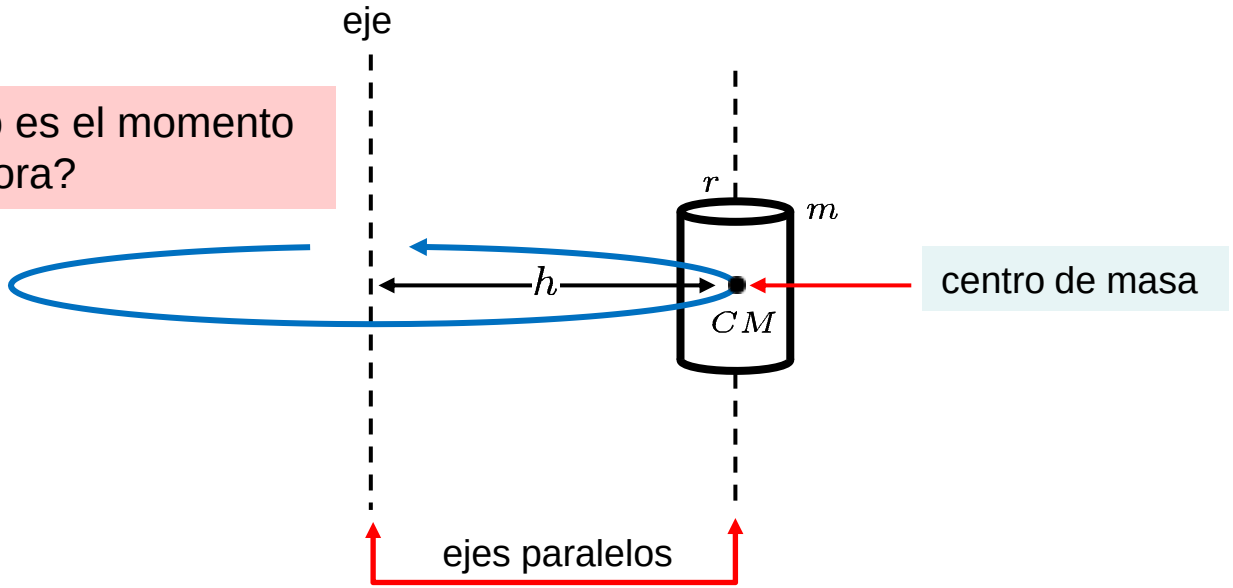


OJO El momento de inercia de un cilindro es lo mismo que lo de un disco. Que cambia es la masa. La distribución de la masa alrededor del eje es la misma.

Teorema de los ejes paralelos



Pero ¿cuánto es el momento de inercia ahora?



teorema de los ejes paralelos

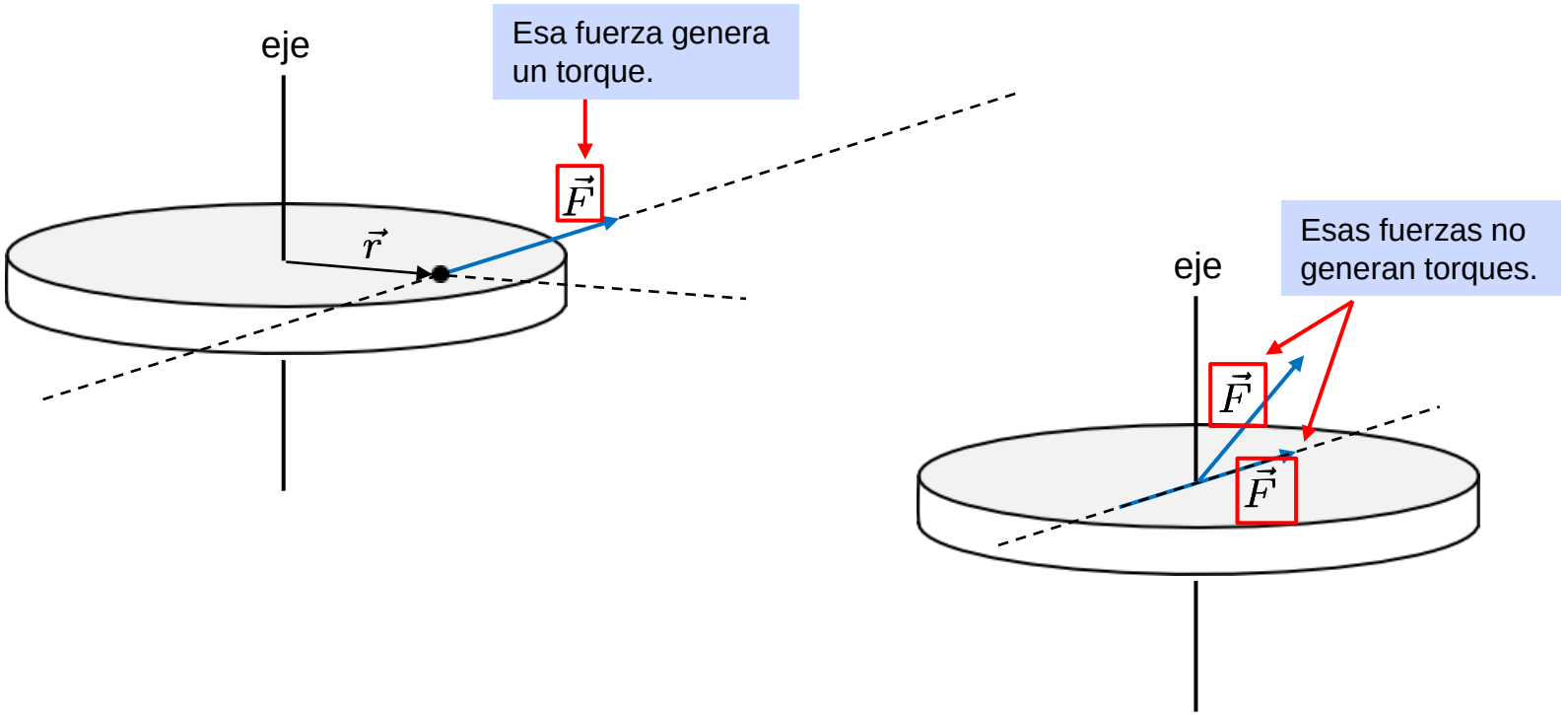
$$I = I_{cm} + m\,h^2 \longrightarrow \frac{1}{2} m r^2 + m\,h^2$$

Momento de inercia de una partícula colocada al CM del cuerpo.

Torque

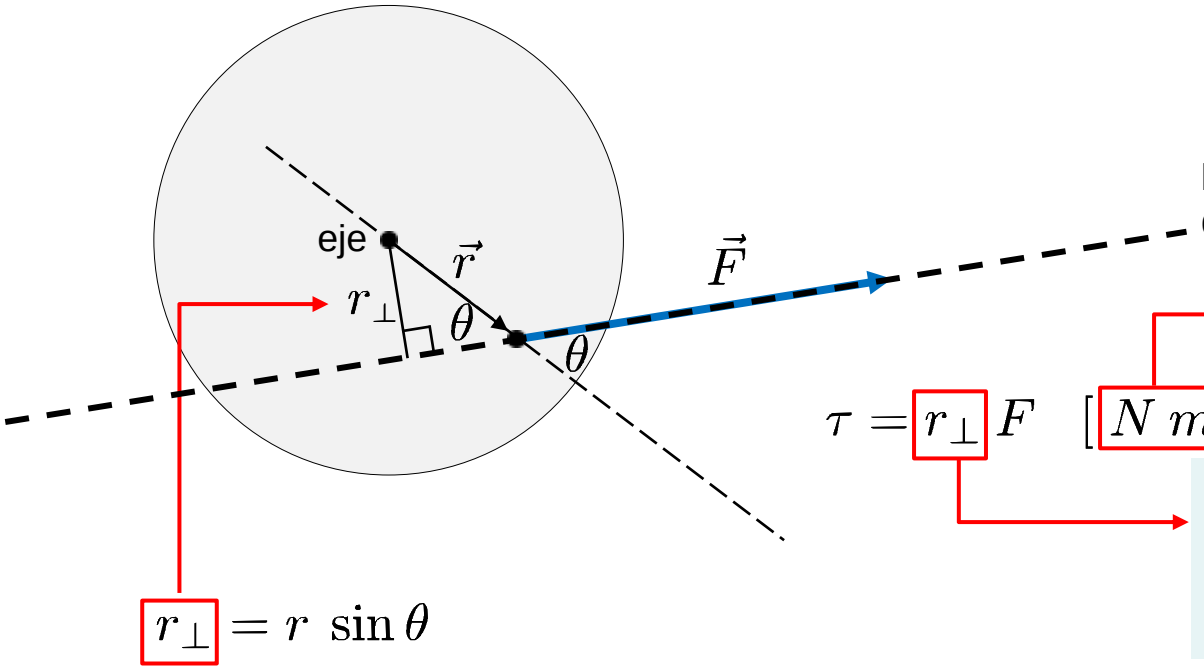
¿Como podemos cambiar el movimiento rotacional de un cuerpo?

Ejercer una **fuerza** sobre el cuerpo extendido en un punto que **no es sobre el eje rotacional ni en dirección hacia el eje rotacional**. Esa fuerza genera un **torque**. La consecuencia de un torque es un cambio en el movimiento rotacional.



Torque ⇒ Acción que genera una fuerza que actúa sobre un cuerpo a una cierta distancia del eje rotacional pero no hacia el eje. Simbolizado por la letra τ .

vista superior



$$\tau = r_\perp F \quad [N\,m]$$

se deja en Nm, no es un trabajo

brazo del momento: distancia perpendicular entre la línea de acción de la fuerza y el eje de rotación

$$r_\perp = r \sin\theta$$

$$\tau = (r \sin\theta)\, F = r\, F \sin\theta$$

ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{F}$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

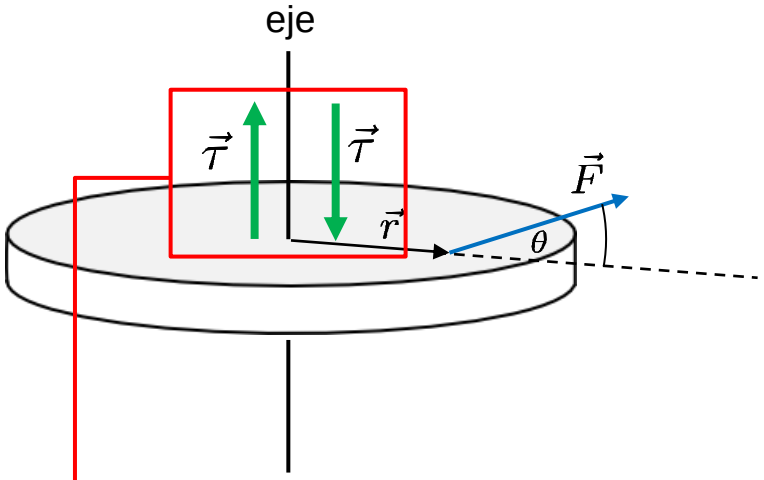
definición vectorial de torque

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

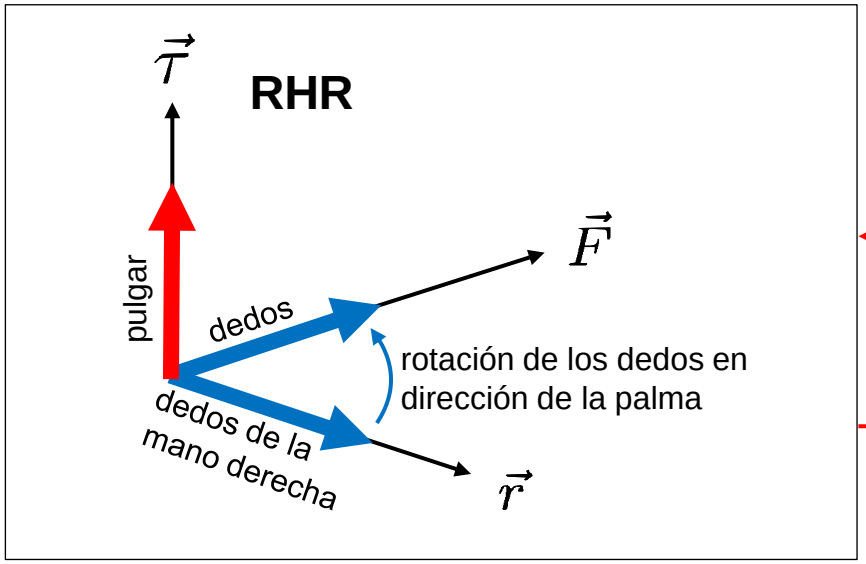
OJO Recuerden la definición del producto vectorial:

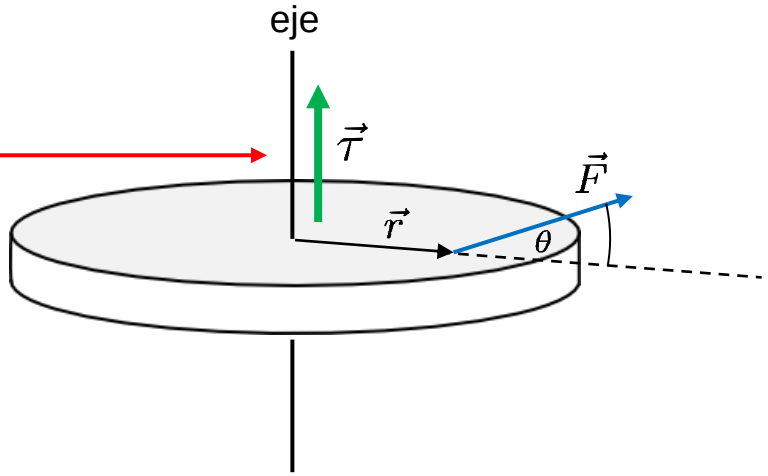
$$\vec{A} \times \vec{B} = A\,B\,\sin\theta$$

$$[\text{ en dirección } \perp \text{ a } \vec{A} \text{ y } \perp \text{ a } \vec{B}]$$



Los dos torques están perpendiculares a $\vec{r}$ y $\vec{F}$, ¿cuál de los dos escogemos? Utilizamos la ley de la mano derecha (RHR).





$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\tau = r\,F\sin\theta$$

Tabla de transformación de movimiento traslacional a rotacional	
Traslación	Rotación
x, y, z	θ
v	ω
a	α
m	I
F	τ

2nda ley de Newton para rotación

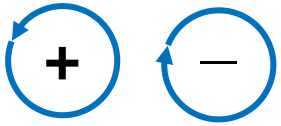
con la tabla de transformación podemos generar la 2nda ley de Newton para rotación

misma dirección

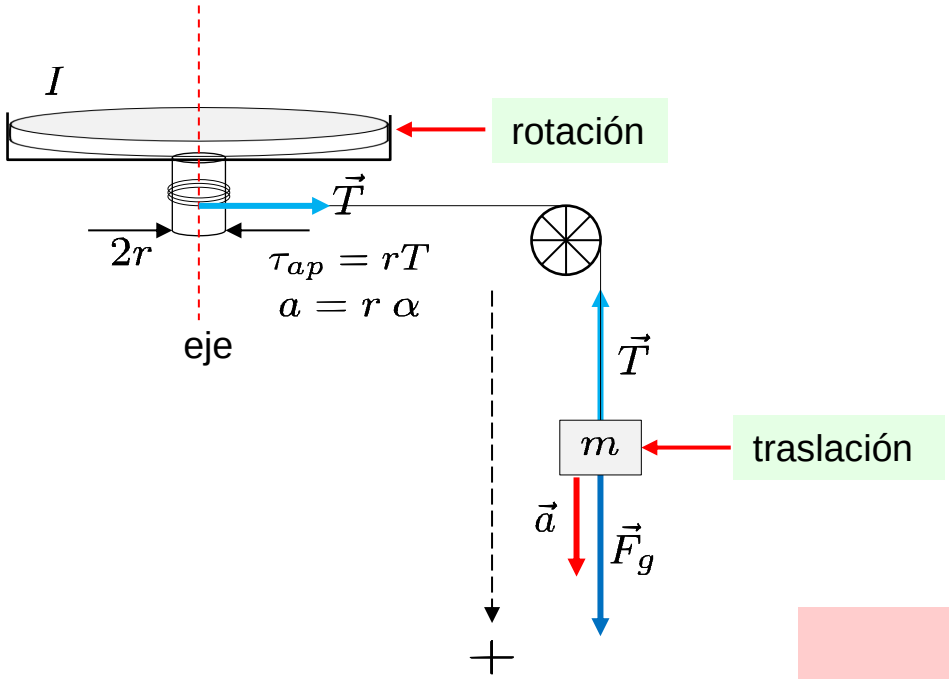
$$\vec{F}_{neta} = m\,\vec{a} \longrightarrow \vec{\tau}_{neto} = I\,\vec{\alpha}$$

$$\vec{\tau}_{neto} = \sum_{i}^{n} \vec{\tau}_i$$

dirección de los torques



ejemplo de un experimento para determinar momento de inercia



análisis

2nda ley de Newton traslación

$$\vec{F}_{neta} = m\,\vec{a}$$

$$\vec{F}_g + \vec{T} = m\,\vec{a}$$

$$m\,g - T = m\,a \longrightarrow T = m\,g - m\,a$$

2nda ley de Newton rotación

$$\vec{\tau}_{neto} = I\,\vec{\alpha}$$

$$\vec{\tau}_{ap} + \vec{\tau}_{fr} = I\,\vec{\alpha}$$

$$\tau_{ap} = I\,\alpha + \tau_{fr} \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{a}{r} \\ \tau_{ap} = rT = r(mg - ma) \end{cases}$$

